

Analyse multifractale en hydrologie

Application aux séries
temporelle

Pietro Bernardara, Michel Lang,
Éric Sauquet, Daniel Schertzer,
Ioulia Tchiguirinskaia

NUMÉRIQUE
LIVRE **LN**

éditions
Quæ

Analyse multifractale en hydrologie

Application aux séries temporelles

Pietro Bernardara
Michel Lang
Eric Sauquet
Daniel Schertzer
Ioulia Tchiriguyskaia

Éditions Quæ
c/o Inra, RD 10, 78026 Versailles Cedex

Collection *Update Sciences & Technologies*

Conceptual Approach to the Study of Snow Avalanches.
Maurice Meunier, Christophe Ancey, Didier Richard,
2005, 262 p.

Qualité de l'eau en milieu rural.
Savoirs et pratiques dans les bassins versants,
Philippe Mérot, coordinateur
2006, 352 p.

Biodiversity and Domestication of Yams in West Africa.
Traditional Practices Leading to *Dioscorea rotundata* Poir,
Alexandre Dansi, Roland Dumont, Philippe Vernier, Jeanne Zoundjihèkpon,
2006, 104 p.

Génétiquement indéterminé.
Le vivant auto-organisé
Sylvie Pouteau, coordinatrice,
2007, 172 p.

L'éthique en friche.
Dominique Vermersch,
2007, 116 p.

Agriculture de précision.
Martine Guérif, Dominique King, coordinateurs,
2007, 292 p.

Territoires et enjeux du développement régional.
Amédée Mollard, Emmanuelle Sauboua, Maud Hirczak, coordinateurs,
2007, 240 p.

Sommaire

Introduction	5
Chapitre 1. La théorie multifractale	7
Comment observer un phénomène à différentes échelles ?	7
Le rapport d'échelle	7
Les observations et les échelles d'un processus hydrologique	8
Les singularités	12
Une description statistique des processus multifractals.....	13
La fonction codimension $c(\gamma)$	13
La fonction des moments statistiques $K(q)$	14
Propriétés générales des multifractales.....	17
Multifractales et extrêmes	18
La divergence des moments.....	18
Effet de la taille de l'échantillon.....	19
Diagnostic sur la présence de valeurs extrêmes.....	21
Présentation des modèles de cascades multiplicatives.....	21
Description générale	22
Propriétés des séries générées par une cascade multiplicative	23
Commentaire sur les champs conservatifs et non-conservatifs	24
Le modèle multifractal universel.....	25
Commentaire sur l'estimation des paramètres multifractals universels	27
Le modèle multifractal universel et les extrêmes	27
Chapitre 2. Application des multifractales à des chroniques de pluie et de débit	31
Données	33
Analyse multifractale de séries de pluie et de débit	35
Analyse spectrale	35
Analyse des lois d'échelle des moments.....	40
Calage des paramètres multifractals universels	42
Commentaire sur les valeurs extrêmes	43
Conclusion	49
Remerciements	51

Annexes	53
Intégration et différenciation fractionnaire	53
Table des notations utilisées.....	54
Références bibliographiques	55
Liste des auteurs	61

Introduction

Cette note technique tente de décrire de façon simple les procédures à mettre en œuvre pour effectuer une analyse multifractale de données hydrologiques. Elle a été produite dans le cadre d'un stage post-doctoral réalisé en collaboration entre des hydrologues du Cemagref et le groupe Multiplicité d'Échelle en Hydrométéorologie du Cereve (*cf.* Remerciements). Elle s'efforce de mettre l'accent sur les liens entre le formalisme multifractal et celui de l'analyse fréquentielle en hydrologie. Le lecteur avec des connaissances en hydrologie se trouvera face à des problèmes habituels dans son domaine, liés à la fois à la multiplicité d'échelles d'observations possibles, la forte variabilité des phénomènes jusqu'aux petites échelles, l'apparition des événements extrêmes rares, mais d'intensité beaucoup plus forte par rapport à l'état « normal » du système, la non-linéarité, voire les effets multiplicatifs des relations entre les variables du système hydrologique. Cela conduit souvent à choisir une description synthétique du système, plutôt que bâtie sur des modèles physiques. Le lecteur découvrira ici une théorie et ses outils statistiques qui traitent ces problèmes et qui cherchent à les modéliser en respectant des propriétés physiques fondamentales liées aux interactions sur une grande gamme d'échelle. Le document fera parfois l'impasse sur les développements mathématiques complexes. Une certaine maîtrise dans le domaine des statistiques est cependant conseillée. Les lecteurs plus curieux pourront se reporter aux nombreuses références bibliographiques pour parfaire leur connaissance dans le domaine.

Nous rappellerons brièvement dans un premier chapitre la théorie des multifractales et ses principales caractéristiques. Nous y détaillerons les procédures d'identification des propriétés d'invariance d'échelle, notion au cœur de cette théorie, et, sur cette base, nous donnerons une première définition des propriétés multifractales du point de vue statistique. Les propriétés générales des champs ou séries multifractals, ainsi que les comportements des extrêmes analysés dans le cadre de cette théorie, y seront décrites. Nous y étudierons ensuite un type de processus vérifiant par construction stochastique les propriétés annoncées : les cascades multiplicatives. Nous nous intéresserons à un modèle de

représentation parmi ceux relevés dans la littérature : le modèle universel. Ce dernier résume la variabilité observée à toutes les échelles par une formule analytique et un nombre réduit de paramètres à ajuster sur les données traitées. Ce document s'achève sur un deuxième chapitre consacré à des exemples d'applications liées à des séries temporelles de pluie et de débit.

Au fil des pages, les aspects encore en cours d'étude relatifs à l'application de la théorie multifractale en hydrologie seront soulignés, en espérant montrer au lecteur l'intérêt scientifique de ces outils.

Chapitre 1

La théorie multifractale

L'analyse multifractale est un cadre approprié pour traiter et modéliser des champs présentant une forte variabilité spatio-temporelle, surtout en ce qui concerne les caractéristiques de non uniformité des phénomènes et leurs comportements extrêmes. Elle offre une modélisation de synthèse de la variabilité du processus analysé. Elle introduit notamment la notion d'invariance d'échelle, c'est-à-dire le lien qui existe entre une mesure et l'échelle de cette mesure.

Par conséquent, l'idée d'appliquer ces concepts à la description des variables géophysiques est venue naturellement à l'esprit des scientifiques. Différents domaines connexes ont ainsi fait l'objet d'applications : géologie, météorologie, biologie, géomorphologie, topographie, imagerie radar... et bien entendu l'hydrologie. En effet, les hydrologues, comme le souligne Chow (1988), doivent bien souvent décrire des systèmes sur lesquels divers processus agissent à différentes échelles de temps (de la seconde au siècle) et différentes échelles d'espace (du millimètre à l'échelle de la planète).

Comment observer un phénomène à différentes échelles ?

Le rapport d'échelle

Nous nous arrêterons en premier lieu sur les définitions générales concernant les échelles ou résolutions auxquelles les phénomènes sont mesurés ou observés. Il est fréquent de voir émerger des questions d'ordre général liées à l'échelle d'analyse de systèmes dynamiques dans le temps et/ou distribués dans l'espace. À quelle échelle faut-il observer le système ? Comment les caractéristiques du système évoluent-elles si on observe ce dernier à différentes échelles ? Peut-on transférer les informations mesurées à une échelle vers une autre échelle ? Si oui, comment ?

Nous supposerons, que le processus ϵ qui nous intéresse peut être observé à différentes échelles d'observation, ces échelles étant liées par le rapport d'échelle λ défini comme suit :

Définition 1. $\lambda = \frac{T_1}{T_2}$,

où T_2 représente l'échelle d'étude la plus grande, et T_1 une échelle plus fine à laquelle le phénomène est observé. Cette définition étant tout à fait générale, la valeur du rapport λ quantifie le rapport entre deux échelles de mesure.

Les observations et les échelles d'un processus hydrologique

Le problème des échelles est particulièrement important dans le domaine de l'hydrologie, où normalement on dispose de séries ou de champs de mesures (de pluie, d'humidité du sol, du débit, etc.) très variables dans l'espace et le temps. Ces séries sont représentatives de différents phénomènes qui se superposent et se neutralisent de façon non-linéaire, et qui agissent à des échelles de temps et d'espace différentes.

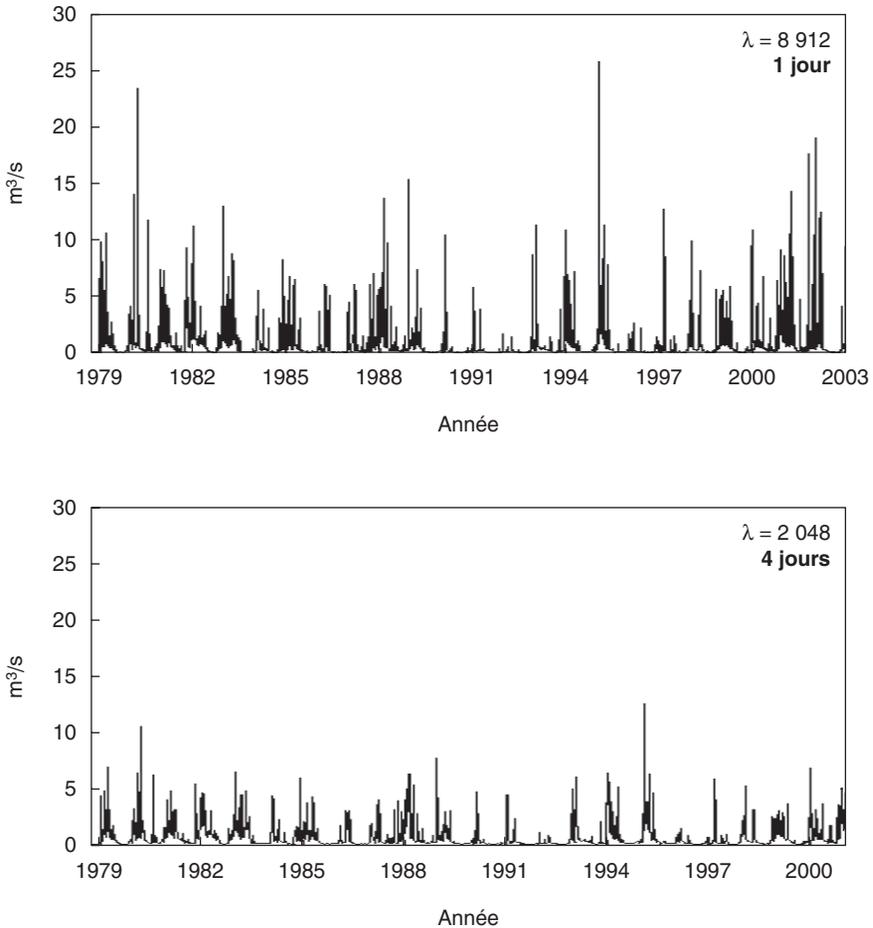


Figure 1.1. Variabilité des mesures de débits moyens selon différentes échelles de temps, de 1 jour (en haut) jusqu'à 256 jours (en bas), sur la station hydrométrique de l'Orgeval au Theil.

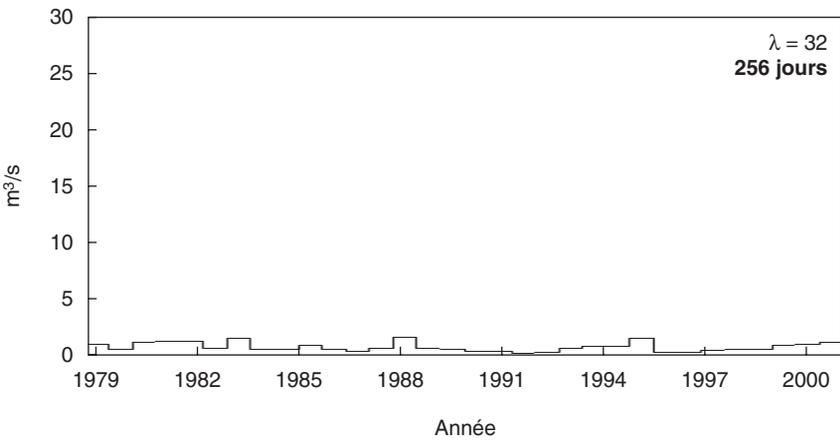
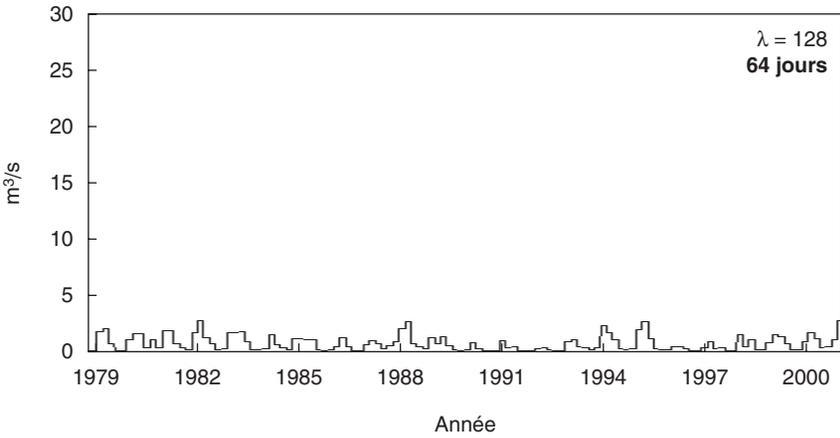
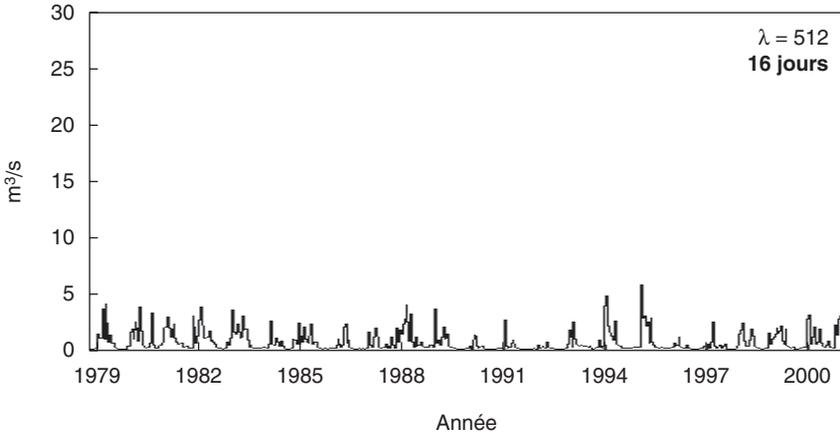


Figure 1.1. suite